Graphen in der Schule

Gerd Baron, TU-Wien

Warnung: Es sind nicht Funktionsgraphen, also Schaubilder von Funktionen gemeint.

Was denn dann?

In einigen neuen Schulbüchern tauchen neue Gebilde auf. Als Netzpläne oder Systemdarstellungen getarnte Figuren aus Knoten (Punkten, Kästchen) und Kanten (Verbindungspfeilen), eben Graphen, erobern nun auch die Schule.

Wo traten und treten sie in der Schule noch auf? Als Darstellungsform von Modellen haben sie sogar eine fächerübergreifende Funktion.

Welche Fragen kann man mit ihrer Hilfe beantworten?

Welche neuen Algorithmen (und Denkmethoden) kann man an ihnen erarbeiten?

Wir wollen die Antworten auf einige dieser Fragen wenigstens andeuten.

Dazu müssen wir natürlich, um eine etwas exaktere Vorgangsweise zu ermöglichen, die Studienobjekte erst definieren.

Unter einem Graphen G verstehen wir ein Paar von Mengen V(G) und E(G). Die Elemente von V(G) heißen Knoten (Punkte, Ecken; engl. vertices, daher V) und die Elemente von E(G) heißen Kanten (Verbindungen, Bögen; engl. edges, daher E). Achtung! In manchen Büchern wird, aus Ecken und Kanten hergeleitet, die Bezeichnung E(G) statt V(G) und K(G) statt E(G) verwendet. Den Kanten werden durch eine Zuordnungsvorschrift f die Knoten, die sie verbinden entweder als geordnetes Paar (gerichtete Kante) oder als ungeordnetes Paar (ungerichtete Kante) zugeordnet. Treten die Paare höchstens einmal als „Bilder" von Kanten auf, so kann man die Kanten mit den Knotenpaaren identifizieren, und E(G) als Teilmenge der Menge aller geordneten Paare von Knoten (gerichteter Graph) oder als Teilmenge der Menge aller ungeordneten Paare von Knoten (ungerichteter Graph) auffassen. Ein Graph ist also als geordnetes Tripel $G=\langle V(G),E(G),f\rangle$ oder als Paar $G=\langle V(G),E(G)\rangle$ mit der entsprechenden Teilmengenrelation gegeben.

Ein Teil H von G, der selbst wieder ein Graph ist, heißt Teilgraph von G. Es gilt also $V(H)\subseteq V(G)$ und $E(H)\subseteq E(G)$ und H Graph. Nimmt man bei gegebenem $W=V(H)$ alle möglichen Kanten von G in H auf, so erhält man einen allein durch W bestimmten (maximalen, gesättigten) Teilgraphen, den von W aufgespannten Teilgraphen von G. Der durch $W=V(G)$ aufgespannte Teilgraph ist G selbst. Daher heißt ein Teilgraph H mit $V(H)=V(G)$ spannender Teilgraph von G.

Netzwerke entstehen aus Graphen, indem man den Kanten reelle Zahlen als Bewertungen zuordnet. Musterbeispiele sind Straßennetze mit ihren Längen in Kilometern oder als Fahrzeit in Minuten oder Stunden. Oder Kanalnetze mit den Kapazitäten der Kanalabschnitte als Bewertung. Ebenso Zustandsdiagramme mit den Übergangswahrscheinlichkeiten als Bewertung.

Viele weitere Grundbegriffe der Graphentheorie entstanden aus solchen Interpretationen oder können sich zumindest in diesen leicht gemerkt werden. Wie zum Beispiel die fast sich selbst erklärenden Begriffe wie Kantenfolge (geschlossen, offen; gerichtet) und Kantenzug (keine Kante mehrfach) und Weg (ungerichtet; offen) oder Bahn (gerichtet; offen) oder Pfad (jeweils auch kein Knoten mehrfach). Sind sie geschlossen, so spricht man von Kreisen bzw. Zyklen. Ihre Länge ist zunächst im Graphen die Anzahl der Kanten in ihnen.

Kann man in einem ungerichteten Graphen zwischen je zwei Knoten einen Weg finden, so heißt er zusammenhängend. Ansonsten sind seine zusammenhängenden Teile die Zusammenhangskomponenten. Bei gerichteten Graphen unterscheidet man zwischen starkem Zusammenhang (zwischen je zwei Knoten eine Bahn, also mit Berücksichtigung der Einbahnregelung; normale Autofahrer) oder schwachem Zusammenhang (ohne Rücksicht auf die erlaubte Richtung der Kanten; Einsatzfahrzeuge und typische Radfahrer).

Ein zusammenhängender, ungerichteter, kreisloser Graph heißt Baum. Ist der Graph nicht notwendigerweise zusammenhängend, aber kreislos, d.h. seine Komponenten sind Bäume, so heißt er Wald.

Bäume sind nicht nur in der Natur, sondern auch in der Graphentheorie schon sehr zeitig aufgetreten. Sie sind dadurch besonders ausgezeichnet, daß die Anzahl der Kanten stets um eins kleiner ist als die Anzahl der Knoten.

In der Chemie spielen die Bäume bei der Darstellung der kettenförmigen Kohlenwasserstoffe naturgemäß eine besondere Rolle. Aber sie waren nicht die ersten Graphen in der Chemie. Der Kekule-Ring mit den drei Doppelkanten war das frühere Muster, sogar <u>der</u> Vorläufer der Graphen schlechthin. Heute sind die Graphen der Fullerene besonders interessant und auch besonders schön.

Ein (eventuell gerichteter) Kantenzug, der jede Kante genau einmal enthält, heißt (offene bzw. geschlossene) Eulersche Linie. Enthält er jeden Knoten genau einmal, so heißt er (offene bzw. geschlossene) Hamiltonsche Linie (bzw. Kreis). Während die Existenz einer Eulerschen Linie in einem Graphen sehr leicht entschieden werden kann, ist die Entscheidung über einen Hamiltonschen Kreis ein sehr hartes Problem.

Eulersche Linien treten nicht nur in den Aufgaben in den Wochenendausgaben von Zeitungen unter dem Titel „Zeichnen in einem Zug, ohne abzusetzen" auf, sondern mit derselben Problemstellung auch beim Plotten von großen Figuren. Da das Absetzen und wieder Aufsetzen des Zeichenstiftes Zeit kostet. Ebenso treten sie bei der Straßenreinigung auf.

Hamiltonsche Linien, speziell Kreise treten beim Problem des Handlungsreisenden, bzw. beim Briefträgerproblem auf.

Die Isomorphie von Graphen ist wie bei allen mathematischen Strukturen durch die Struktur erhaltende Abbildungen definiert. Bei Graphen müssen also die Knoten und Kanten so abgebildet werden, daß zwischen den Urbildern genau dann eine Zuordnung besteht, wenn sie auch zwischen den Bildern besteht.

Ein ebener Graph ist ein geometrischer Graph, dessen Knoten Punkte in der Ebene sind, und dessen Kanten stückweise glatte Kurvenbögen zwischen den Knoten sind, die außer ihren Endpunkten keine weiteren Punkte gemeinsam haben. Ein Graph heißt plättbar oder planar, wenn er zu einem ebenen Graphen isomorph ist.

Die Isomorphie von Graphen ist vor allem in der Chemie zur Untersuchung und Wiederauffindung (in Datenbanken) von verschiedenen, komplizierten chemischen Verbindungen mit großen Molekülen von enormer Bedeutung. Schon Cayley hat sich mit der Anzahl der nicht isomorphen, der Isomere eines kettenförmigen Kohlenwasserstoffs beschäftigt und damit die Suche nach allen Isomeren erst ermöglicht oder zumindest vereinfacht.

Die Planarität von Graphen spielt besonders in der Entwicklung von gedruckten Schaltungen bzw. Mikrochips eine bedeutende Rolle.

In Netzwerken kann man abhängig von der Interpretation der Kantenbewertungen aus diesen eine Bewertung von Teilgraphen oder Kantenfolgen herleiten. Bei Fahrzeiten oder Weglängen oder Baukosten wird man die Summe der Einzelbewertungen nehmen. Bei Kapazitäten oder Flüssen wird man für Kantenfolgen das Minimum, aber für gewisse Teilgraphen als Vereinigung von Kantenfolgen die Summe der Bewertungen (Flüsse) dieser Kantenfolgen nehmen. Ähnlich auch bei Übergangswahrscheinlichkeiten, nämlich das Produkt längs einer Kantenfolge und die Summe über die einzelnen Kantenfolgen. Hier ist das Rechnen mit Matrizen eine adäquate Vorgangsweise.

Manchmal werden auch noch den Knoten Bewertungen zugeordnet. Oder auch den Kanten meherere Zahlen, die dann entweder untere und obere Schranken für eine „Lösung" bedeuten können, oder ganz verschiedene Bedeutung haben können, wie z.B. Kapazitäten und Kosten je Einheit transporierter Güter.

Damit können dann Warenflüsse von den Produktionsstätten zu den Abnehmern mit Mindestabnahmen und maximalen Produktionen behandelt werden, wobei sogar über die Transport- oder Zwischenhandelskosten die billigste Lösung gesucht werden kann.

Für die verschiedensten hier angerissenen Probleme gibt es mehr oder weniger effiziente Algorithmen. Eine Klasse davon sind die sogenannten Markierungsalgorithmen, bei denen der Reihe nach die Knoten des Graphen nach erfüllt sein gewisser Bedingungen in seiner Umgebung mit festen oder variablen Marken versehen werden. Nach dem Durchlauf einzelner Schrittfolgen des Algorithmus werden dann die Markenverteilungen in gewisse Eigenschaften des Graphen übersetzt. Z.B. kann man sich leicht einen solchen Algorithmus für den Zusammenhang, bzw. den starken Zusammenhang eines Graphen überlegen. Eine wiederholte Anwendung dieses Algorithmus kann sogar die Bestimmung der Zusammenhangskomponmenten ermöglichen.

Beispielsweise kann man von einem Knoten ausgehend alle über Kanten erreichbaren Knoten mit +1 markieren, und dann alle Nachbarn (direkten Nachfolger) der mit +1 markierten Knoten ebenfalls mit +1 markieren, solange bis keine Veränderung mehr möglichst. Alle mit +1 markierten Knoten sind dann von dem Startknoten aus erreichbar.

Variiert man den obigen Algorithmus dahingehend, daß man bei der Bestimnmung der Markierung eines direkten Nachfolgers stets seine Markierung mit der Summe aus der Markierung des Knoten und der Bewertung (Länge) der entsprechenden Kante vergleicht und die kleinere der beiden Zahlen als Markierung verwendet, so bekommt man nicht nur Information über die Erreichbarkeit, sondern sogar über die Distanz, also die Länge des kürzesten Weges vom Startknoten zu allen erreichbaren Knoten. Diese kürzesten Wege kann man sogar aus den Distanzen leicht rekonstruieren. Selbstverständlich werden eigenlich nicht kürzeste Wege, sondern kürzeste Kantenfolgen konstruiert. Eine solche existiert und ist ein Weg genau dann, wenn kein Zyklus negativer Länge (Summe der Kantenbewertungen) durchlaufen werden kann, weil sonst eine oftmalige Durchlaufung diese Zyklus die Gesamtlänge beliebig klein werden lassen kann.

Wählt man statt der kleineren der beiden Zahlen stets die größere und existiert kein Zyklus positiver Länge, so kann man damit auch den längsten Weg bestimmen.

Die Algorithmen zur Bestimmung maximaler bzw. kostenminimaler Flüsse auf Graphen sind schon etwas komplizierter. Wir müssen dafür auf die Literatur verweisen.

Bei der Untersuchung von Gewinnstrategien für Spiele auf Graphen, bei denen ein Spielstein abwechselnd von den beiden Spielern längs Kanten von einem Knoten zu einem direkten Nachfolger gezogen wird, und jener Spieler verliert, der nicht mehr ziehen kann, spielt die sogenannte Grundyfunktion eien entscheidende Rolle. Sie ist definiert als eine Funktion die jedem Knoten eines gerichteten Graphen eine natürliche Zahl zuordnet. Ist dabei für jeden Knoten die Bedingung erfüllt, daß sein Funktionswert die kleinste natürliche Zahl ist, die unter den direkten Nachfolgern nicht vorkommt, so heißt eine solche Funktion Grundyfunktion des Graphen. Enthält der Graph keinen Zyklus (azyklischer Graph), so existiert stets genau eine Grundyfunktion. Diese kann bestimmt werden, indem man zuerst den Knoten von denen keine Kanten wegführen den Funktionswert 0 zuordnet. Dann werden jeweils Konten, deren sämtliche Nachfolger schon bestimmte Funktionswerte haben, die kleinste unter diesen Zahlen nicht vorkommende natürliche Zahl als Funktionswert zugeordnet. Daß dies tatsächlich funktioniert, folgt aus der leicht einzusehenden Feststellung, daß jeder azyklische Graph mindestens einen Knoten haben muß, von dem keine Kante wegführt.

Haben wir nun die (oder bei nicht azyklischen eine) Grundyfunktion, so kann man das Spiel nicht verlieren, wenn man stets auf einen Knoten mit dem Funktionswert 0 zieht. Der Gegner hat entweder verloren , oder er muß ja dann auf einen beliebigen Nachfolger ziehen, und der hat einen Funktionswert größer als 0. Unter seinen direkten Nachfolgern muß also die Null wieder auftreten, und man kann selbst wieder dorthin ziehen.

Auf den nächsten Seiten wollen wir einige Beispiele von Graphen und Netzwerken mit ihren Bewertungen und mögichen Problemen zusammenstellen. Im Vortrag wurden dazu auch entsprechende Bilder gezeigt, die wir leider nicht wiedergeben können.

Abschließend seien noch einige Bücher genannt, die derzeit leicht beschaffbar, weitere für Lehrer und Schüler verständliche Informationen zu diesem interessanten und modernen Gebiet der Mathematik enthalten.

Klaus WAGNER - Rainer BODENDIEK Graphentheorie Bd. I-III. BI Wissenschaftsverlag.
Lutz VOLKMANN Graphen und Digraphen; Eine Einführung in die Graphentheorie.
Springer-Verlag, Wien - New York.

Gebiet: Geometrie
Graph: Polyederkantenmodell
Bewertungen:
Operation:
Probleme: verschiedene Polyeder, Isomorphie von Graphen

Gebiet: Chemie
Graph: Strukturformeln, Molekülmodelle mit Bindungen
Bewertungen: Bindungsenergien
Operation:
Probleme: Verschiedenheit, Isomorphie

Gebiet: Biologie
Graph: Doppelhelix, DNS mit Bindungen
Bewertungen:
Operationen:
Probleme: Anzahlbestimmungen

Gebiet: Wahrscheinlichkeitsrechnung
Graph: Wahrscheinlichkeitsbaum
Bewertungen: Wahrscheinlichkeiten
Operation: Multiplikation
Probleme: Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Anordnungen nach Endknotenwahrscheinlichkeiten, Huffman-tree

Gebiet: Physik
Graph: Zustandsdiagramme mit Übergängen
Bewertungen: Übergangswahrscheinlichkeiten
Operation: Multiplikation
Probleme: Wahrscheinlichste Übergangsketten

Gebiet: Geographie
Graph: Systeme von Flüssen
Bewertungen: Längen
Operation: Summe
Probleme: Herausarbeitung von charakteristischen Parametern zur Unterscheidung von geologischen Eigenschaften der Flußsysteme.

Gebiet: Informatik
Graph: Ablauf- und Blockdiagramme für Programme
Bewertungen: Rechenzeiten
Operation: Summe, mit Erwartungswerten gewichtete Summen
Probleme: Komplexität, Korrektheit

Gebiet: Informatik
Graph: Datenbanken, Struktur- und Entscheidungsbäume, Suchbäume
Bewertungen: mittlere Zugriffszeiten, Häufigkeiten
Operation:
Probleme: Komplexität, Sicherheit

Gebiet: Linguistik
Graph: Satzstruktur, Stazteile und ihre Beziehungen
Bewertungen:
Operationen:
Probleme: Satz- und Wortanalyse; Sprachunterschiede, Stilunterschiede

Gebiet: Relationen, z.B. Teilbarkeit, Teilmengen
Graph: Hasse-Diagramm oder vollständige Relation
Bewertungen:
Operation:
Probleme: transitiver Abschluß oder minimaler erzeugender Graph (Hasse-Diagramm), Höhe und Breite, d.h. maximale Kettenlänge und Anzahl paarweise disjunkter Ketten

Gebiet: Verkehr
Graph: Straßen-, Bahnnetz
Bewertungen: Länge, Fahrzeiten
Operation: Summe
Probleme: kürzeste Wege, Erreichbarkeit

Gebiet: Kanäle
Graph: Kanalnetz
Bewertungen: Kapazitäten, Durchflußmengen/Minute
Operation: Minimum
Probleme: Wege mit maximaler Kapazität, maximale Flüsse durch das geasamte Netz

Gebiet: Telephon
Graph: Telephonnetz
Bewertungen: Übertragungsrate, Kapazuität; Fehlerwahrscheinlichkeit
Operation: Minimum; Produkt
Probleme: Zusammenhang, spannende Bäume, Routensuche mit maximaler Kapazität, Neusuche bei Auftreten von Störungen oder großer Fehlerwahrscheinlichkeit

Gebiet: Einkaufszentren; Feuerwehr, Rettung
Graph: Straßennetz
Bewertungen: Fahrzeiten; relative Häufigkeit der Fahrten, Einwohnerzahlen in den Knoten
Operation: Summe, gewichtete Summe der Distanzen oder der maximalen Distanz
Probleme: Zentren (Zentralpunkte oder Mengen), Mediane

Gebiet: Versorgung
Graph: Quellen (Produzenten) Senken (Abnehmer) Zwischenhändler und Verkehrsnetz
Bewertungen: Kapazitäten und Kosten als Gewichte
Operation:
Probleme: Flüsse auf Graphen, lineare Optimierung

Gebiet: Produktion
Graph: Zustände und Übergänge
Bewertungen: Dauer, Arbeitszeit
Operation: Summe
Probleme: Arbeitsablauf, längste Wege, CPM

Gebiet: Spiele auf Graphen
Graph: Spielbrett, oder Zustände/Zugmöglichkeiten
Bewertungen:
Operation:
Probleme: Gewinnstrategien suchen, Grundy-Funktion, Kerne

Gebiet: Elektrotechnik
Graph: Schaltkreise, gedruckte Schaltungen
Bewertungen: Ausmaße, Dicke, Widerstände oder Kapazitäten
Operation:
Probleme: Planarität, oder Zerlegung in möglichst kleine Anzahl von planaren Teilgraphen, maximale planare Teilgraphen